



٢٠٢١

ملزمة

الجبر والإحصاء

الترم الأول

الصف الثالث الإعدادي



إعداد أ/ محمود عوض حسن

تساوى زوجين مرتبين

• الزوج المرتب: (أ ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ : المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب : المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

◆ (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) فمثلا (٢ ، ٥) ≠ (٥ ، ٢)

◆ (١ ، ٣) يسمى زوج مرتب بينما {١ ، ٣} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا: إذا كان (س ، ص) = (٥ ، ٣) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا : إذا كان (س – ٢ ، ١٠) = (٧ ، ص+٢)

فإن س – ٢ = ٧ ⟵ س = ٩ ، ص+ ٢ = ١٠ ⟵ ص = ٨

مثال ١

إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣)

فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س+٢ص}}$

الحل

س – ١ = ٨ ∴ س = ٩

ص + ٣ = ١١ ∴ ص = ٨

∴ $\sqrt{\text{س+٢ص}} = \sqrt{٩ + ٢ \times ٨}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال 2

إذا كانت ($س^{٥}$ ، ص +١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$س^{٥}$ = ٣٢ ∴ $س^{٥}$ = $٢^{٥}$

∴ س = ٢

ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ ∴ ص + ١ = ٣

∴ ص = ٢

تدريب

إذا كانت: (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب – ١)

فإن أ = ... ، ب = ...



حاصل الضرب الديكارتي

إعداد أ/ محمود عوض



حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين س ، ص

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين س ، ص يكتب س × ص ويقرأ س ضرب ص
- س × ص : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة س ومسقطها الثانى ينتمى للمجموعة ص.

أي أن: س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

- فمثلا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن : س × ص = {١ ، ٣} × {٢ ، ٤ ، ٦}

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

بينما ص × س = {٢ ، ٤ ، ٦} × {١ ، ٣}

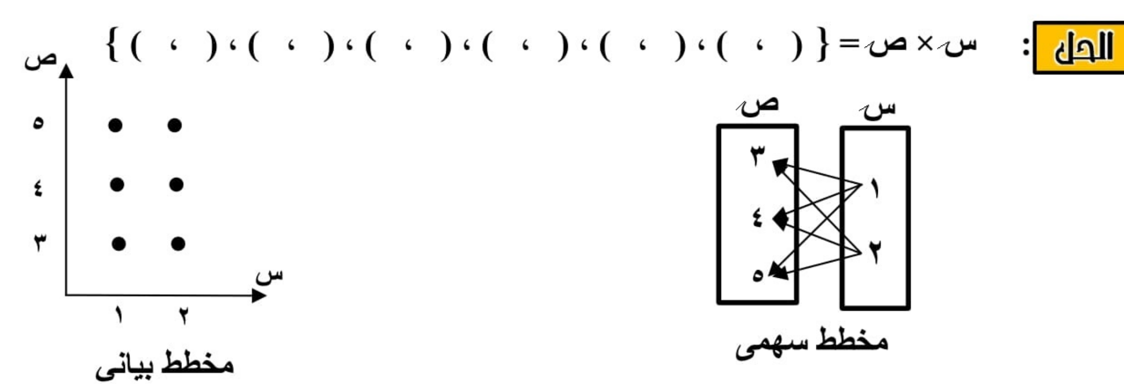
= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) }

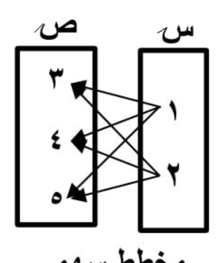
- لاحظ أن : س × ص ≠ ص × س
- يمكن تمثيل س × ص كمخطط سهمى ومخطط بيانى كما في المثال التالى.

مثال إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

فأوجد س × ص ومثله بمخطط سهمى وآخر بياني

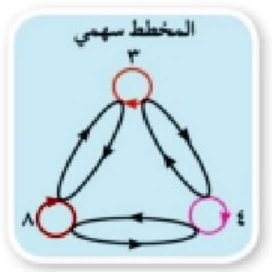
الحل : س × ص = { (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) }





تصميم محمود عوض معلم أول رياضيات

حاصل الضرب الديكارتي س × س أو س²



- إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٨}

فإن : س × س أو س² = {٣ ، ٤ ، ٨} × {٣ ، ٤ ، ٨}

= { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٨) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٨) ، (٨،٣) ، (٨،٤) ، (٨،٨) }

عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- إذا كانت س = {٢ ، ٥} فإن عدد عناصر س = ٢ وتكتب ن (س) = ٢
- إذا كانت ص = {٤} فإن ن (ص) = ١ وليس ٤

القاعدة: ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)

فمثلا: إذا كانت ن (س) = ٤ ، ن (ص) = ٥ فإن ن (س × ص) = ٤ × ٥ = ٢٠

أيضا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦} فإن ن (س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

العمليات على المجموعات

إذا كانت س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥} فإن:

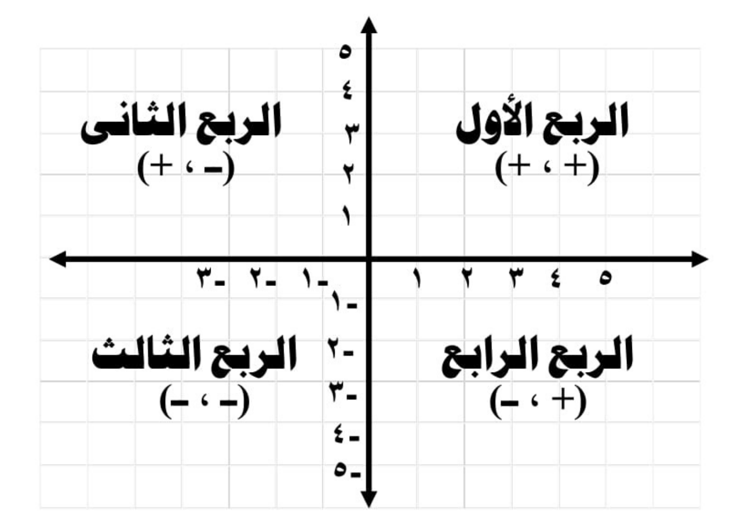
- التقاطع ∩ : س ∩ ص = {٣} ← خد المكرر
- الاتحاد ∪ : س ∪ ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← خد الكل ، والمكرر مرة واحدة
- الفرق − : س − ص = {٢} ← خد الموجود في س ومش موجود في ص
  ص − س = {٤ ، ٥} ← خد الموجود في ص ومش موجود في س

الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبعة التربيعية إلى ٤ أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتى إحداثييها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثى السينى = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل (٠ ، ٣)
- إذا كان الإحداثى الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل (٢ ، ٠)

مثال

- النقطة (٥ ، ٢) تقع في الربع الأول
- النقطة (-٢ ، ٣) تقع في الربع الثاني
- النقطة (-٣ ، -٤) تقع في الربع الثالث
- النقطة (١ ، -٣) تقع في الربع الرابع
- النقطة (٠ ، ٢) تقع على محور الصادات
- النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور السينات
- النقطة (٠ ، ٠) تسمى نقطة الأصل "و"



تدريب

- النقطة (٣ ، -٢) تقع ....
- النقطة (-٥ ، ٦) تقع ....
- النقطة (-٤ ، -٧) تقع ....
- النقطة (٠ ، -٢) تقع ....
- النقطة (٥ ، ٠) تقع ....
- النقطة (٣ ، ٤) تقع ....

١ إذا كانت س × ص = { (٢،٢) ، (٢،٥) ، (٢،٧) }

أوجد : ١) ص ٢) ص × س

٣) ن (ص^2)

الحل

- ص = { ٢ ، ٥ ، ٧ }
- ص × س = { (٢،٢)، (٥،٢)، (٧،٢) }
- ن (ص^2) = ٣ × ٣ = ٩

٢ إذا كانت س = {٣،٤} ، ص = { ٤،٥ }

، ع = { ٦،٥ } فأوجد :

١) س × (ص∩ع) ٢) (س ـ ص) × ع

الحل

التجهيز: (ص ∩ ع) = { ٥ } ، س ـ ص = { ٣ }

- س × (ص∩ع) = {٣،٤} × { ٥ }
  = { (٣،٥)، (٤،٥) }
- (س ـ ص) × ع = { ٣ } × { ٦،٥ }
  = { (٣،٦)، (٣،٥) }

٣ إذا كانت س = {٢،٥} ، ص = { ١،٢ }

، ع = { ٣ } فأوجد :

١) ن (س × ع) ٢) (ص ∩ س) × ع

الحل

١ ن (س×ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢×١ = ٢

٢ التجهيز: (ص ∩ س) = { ٢ }

(ص ∩ س) × ع = { ٢ } × { ٣ } = { (٢،٣) }

٤ إذا كانت س = {١،٥،٦} ، ص = { ٢،٤،٥ }

فأوجد : ١) ص × س ومثله بمخطط سهمى

٢) ن (س × ص)

الحل

١ ص × س = { (٢،١)، (٢،٥)، (٢،٦) ، (٤،١) ، (٤،٥) ، (٤،٦) ، (٥،١) ، (٥،٥) ، (٥،٦) }

مثل المخطط بنفسك

٢ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٣×٣ = ٩

٥ إذا كانت س = {٢،٣} ص = { ٣،٤،٥ }

فأوجد : ١) س × ص

٢) (س × ص) ∩ ص^2

الحل

١ س × ص = { (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٢ ص^2 = { (٣،٣)، (٣،٤)، (٣،٥) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٥)، (٥،٣)، (٥،٤) ، (٥،٥) }

(س × ص) ∩ ص^2 = { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٦ إذا كانت س = {٢،-١} ص = { ٤ ، ٠ }

، ع = { ٤،٥،-٢ } فأوجد :

فأوجد : ١) س × ص ٢) س^2

٣) ن (س × ع) ٤) ن (ع^2) ٥) ن(ص^2)

الحل

١ س × ص = { (٢،٤)، (٢،٠)، (-١،٤) ، (-١،٠) }

٢ س^2 = { (٢،٢)، (٢،-١)، (-١،٢) ، (-١،-١) }

٣ ن (س × ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢ × ٣ = ٦

٤ ن (ع^2) = ن (ع) × ن (ع) = ٣ × ٣ = ٩

٥ ن (ص^2) = ن (ص) × ن (ص) = ٢ × ٢ = ٤

إعداد أ/ محمود عوض

العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج **بيان العلاقة** من أزواج الضرب الديكارتي حسب **شرط** معين يعطى لك في المسألة
- **المقصود بجملة أ ع ب** : أي علاقة أ ، ب حيث أ هى المسقط الأول ، ب هي المسقط الثانى في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول ∋ س ، المسقط الثانى ب ∋ ص

مثال ١

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٥

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج اللى ينطبق عليها الشرط أ + ب = ٥ يعنى المسقط الأول + المسقط الثانى = ٥

بيان ع = { (١،٤)، (٣،٢)، (٤،١) }

س	ص
١	١
٣	٢
٤	٣
	٤
	٥

(١ ← ٤ ، ٣ ← ٢ ، ٤ ← ١)

تدريب

إذا كانت س = { ٢، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ = $\frac{1}{2}$ ب

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

الحل

اختر الأزواج اللى فيها المسقط الأول نصف الثانى

بيان ع =

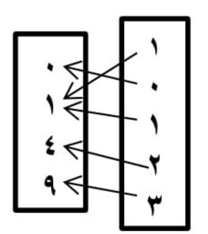
متي تكون العلاقة دالة ؟!

- يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتى:
  - ❖ **إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط** (في بيان ع)
  - ❖ **أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط** (في المخطط السهمى)
- إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثانى في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

١) إذا كانت س = { -١، ٠، ١، ٢، ٣}،
ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^2$ = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع = { (-١،١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢،٤)، (٣،٩) }

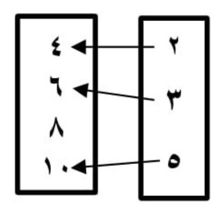


- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
أو لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٠، ١، ٤، ٩ }

٢) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ،
ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " ٢أ = ب "
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (٢،٤)، (٣،٦)، (٥،١٠) }

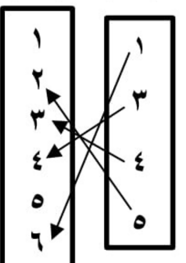


- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }

٣) إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٧
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

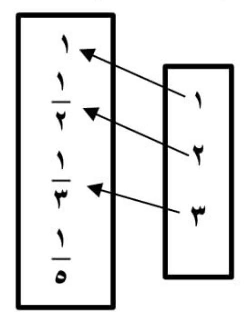
بيان ع= { (١،٦)، (٣،٤)، (٤،٣)، (٥،٢) }



- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٢، ٣، ٤، ٦ }

٤) إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = { ١، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{5}$ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

بيان ع= { (١،١)، (٢ ، $\frac{1}{2}$)، (٣ ، $\frac{1}{3}$) }



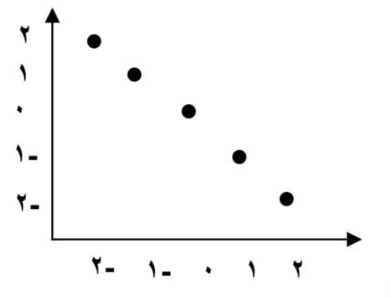
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ }

٥

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }
وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ معكوس جمعى للعدد ب
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان ع = { (-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢) }



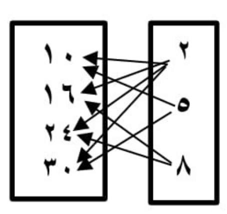
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س ظهر في بيان ع كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ }

٦

إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ،
ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.هل ع دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (٢،١٠)، (٢،١٦)، (٢،٢٤)، (٢،٣٠)، (٥،١٠)، (٥،٣٠)، (٨،١٦)، (٨،٢٤) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ،
وكانت ع علاقة معرفة على س
وكان بيان ع = { (أ ، ٣)، (ب ، ١)، (١ ، ٥) }
١) أوجد مدى الدالة
٢) أوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثانى

المدى = { ٣ ، ١ ، ٥ }

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..
العنصر ١ ظهر يبقى أ ، ب هما ٣ ، ٥

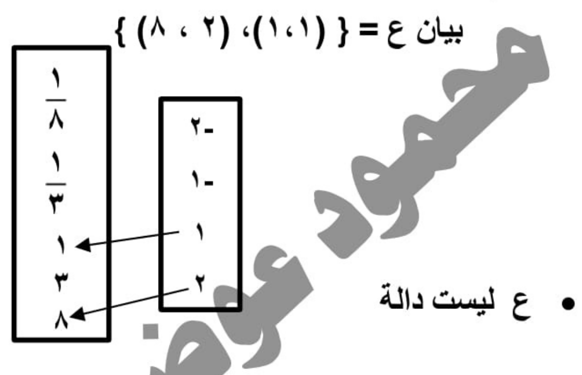
أ + ب = ٣ + ٥ = ٨

٨

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ }،
ص = { $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{3}$، ١، ٣، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^3$ = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (١،١)، (٢ ، ٨) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س لم يخرج منه أسهم.



إعداد أ/ محمود عوض



الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ⟵ ص ويكون :

❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س

❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص

❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)

- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س + ١ ، د(س) = $س^٢$ + ٢س – ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س) = ص

مثال ١

إذا كانت د: س ⟵ ص ، س = { ٣، ٥ ، ٧} ، ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) }

فأوجد : ١ـ مجال الدالة ٢ـ المجال المقابل ٣ـ مدى الدالة ٤ـ قاعدة الدالة

الحل

١ـ مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

٢ـ المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

٣ـ مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }

٤ـ قاعدة الدالة هي : د (س) = ٣س

مثال ٢

إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }

فأوجد : ١ـ مجال ومدى الدالة ٢ـ قاعدة الدالة

◆ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

◆ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

◆ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في $س^٢$ نضع العدد بين قوسين فمثلا إذا كانت س = ـ٣ فإن $س^٢$ = $(-٣)^٢$ = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما ويمكن الاستعانة بالآتى:

١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمى لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥

٢ إذا كان د (٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧

مسائل على التعويض فى الدالة

١ إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥

أوجد قيمة ب

الحل

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن س = ٣ الناتج هيساوى ١٥

٤ × ٣ + ب = ١٥

١٢ + ب = ١٥ ∴ ب = ٣

٢ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٤س ـ ٥

فأوجد قيمة أ

الحل

من الزوج (أ ، ٣) نأخذ س = أ ، د (س) = ٣

بالتعويض في الدالة

∴ ٣ = ٤ أ ـ ٥

٤ أ = ٣ + ٥ ⟸ ٤ أ = ٨

∴ أ = ٢

٣ إذا كانت د (س) = $س^٢$ ـ ٣س ، ر (س) = س ـ ٣

فأوجد د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$)

الحل

د ($\sqrt{٢}$) = $(\sqrt{٢})^٢$ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$

ر ($\sqrt{٢}$) = $\sqrt{٢}$ ـ ٣

٣ ر ($\sqrt{٢}$) = ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩

د ($\sqrt{٢}$) +٣ ر ($\sqrt{٢}$) = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩ = ـ ٧

٤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٦س ـ أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠

من الزوج (ب ، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص =٣

٣ = ٦ × ٠ ـ أ ⟸ ٣ = ٠ ـ أ

ـ أ = ٣ ⟸ أ = ٣

٥ إذا كانت س = { ٠، ١، ٣ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٥ ـ س

فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

الحل

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س

د (٠) = ٥ ـ ٠ = ٥

د(١) = ٥ ـ ١ = ٤

د (٣) = ٥ ـ ٣ = ٢

∴ صور عناصر س (هي المدى) = { ٥ ، ٤ ، ٢ }

٦ إذا كانت س = { ٢، ٣، ٤ } ، ص ={ ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٩ ـ س

فأوجد بيان الدالة د ثم أوجد المدى .

الحل

نعوض في الدالة د(س) = ٩ ـ س عن قيم المجموعة س

د (٢) = ٩ ـ ٢ = ٧

د(٣) = ٩ ـ ٣ = ٦

د (٤) = ٩ ـ ٤ = ٥

بيان د = { (٢،٧) ، (٣،٦) ، (٤،٥) }

المدى = { ٧ ، ٦ ، ٥ }



دوال كثيرات الحدود

إعداد أ/ محمود عوض



◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير س ∋ ط ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ **أمثلة لدوال كثيرات حدود:**

مثل: د(س) = ٢س +١ ، د(س)= $س^{٢}$ + ٣س – ٢ ، د(س) = $س^{٣}$ – ٨

◆ **أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :**

مثل: د(س)= $س^{٢}$ + $\sqrt{س}$ +٨ ، د(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ +٢)

درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د: د(س) = $س^{٤}$ + ٢$س^{٣}$ + ٥ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د: د(س) = $س^{٢}$ + ٢س - ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د: د(س) = س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د: د(س) = ٧ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال١: الدالة د: د(س) = $س^{٢}$ (س +٢) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^{٣}$ + ٢س ∴ د دالة من الدرجة الثالثة

مثال٢: الدالة د: د(س) = $س^{٢}$ – ($س^{٢}$ – ٣س +١) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^{٢}$ – $س^{٢}$ + ٣س – ١ = ٣س +١ ∴ د دالة من الدرجة الأولى

مثال ١

إذا كان د(س) = $س^{٢}$ – س +٣

فأوجد : د(-٢) ، د(٠) ، د($\sqrt{٣}$)

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (-٢) = $(-٢)^{٢}$ – -٢ + ٣ =١١

د (٠) = $٠^{٢}$ – ٠ + ٣ = ٣

د ($\sqrt{٣}$) = $(\sqrt{٣})^{٢}$ – $\sqrt{٣}$ +٣

= ٩ – $\sqrt{٣}$ +٣ = ١٢ – $\sqrt{٣}$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٢$س^{٢}$ – ٥س + ٢

١) اذكر درجة الدالة د

٢) اثبت أن د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الحل

- الدالة د من الدرجة الثانية
- د (٢) = ٢ × $٢^{٢}$ – ٥ × ٢ + ٢ = صفر

د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ – ٥× $\frac{١}{٢}$ + ٢ = صفر

∴ د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

الدالة الخطية

◆ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة **الأولى**

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س – ١ ، د(س) = ٥س +٣

◆ تكون على الصورة د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠ وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)

➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

فمثلا: إذا كانت د: د(س) = ٢س – ٥ فإن أ = ٢ ، ب = –٥ ومنها فإن :

➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، –٥)

➢ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)

◆ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠
و نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ⟸ نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ⟸ نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣ س – ١
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحل

في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم لـ س

س	٣س – ١	ص
٠	٣ × ٠ – ١	-١
١	٣ × ١ – ١	٢
٢	٣ × ٢ – ١	٥

من قاعدة الدالة: أ = ٣ ، ب = –١

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) هى ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ب) هى (٠ ، -١)

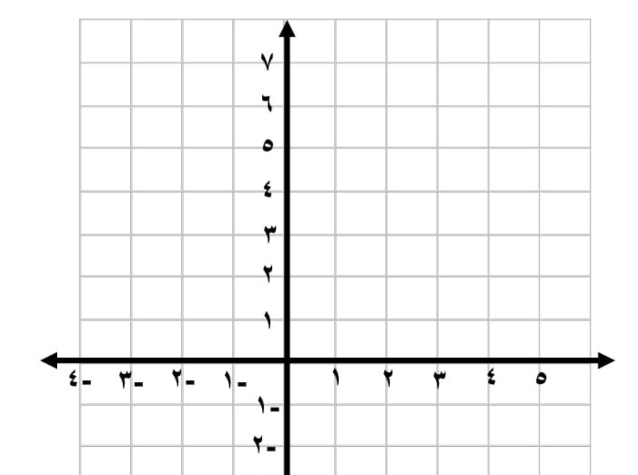
تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ٢ س – ٣

وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحـل

س	٢س – ٣	ص



الدالة الثابتة

❖ الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∈ ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د (س) = ٧ ، د (س) = ٥ ، د (س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (١) = ٥ ، د (٥) = ٥ ، د (-٥) = ٥ ، د (٠) = ٥ وهكذا

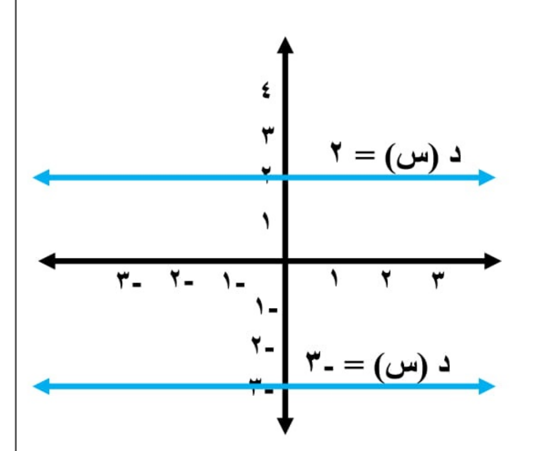
فمثلا: إذا كانت د (س) = ٧ فإن د(٣) + د (-٣) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات

◆ مثال١: مثل بيانيا الدالة د (س) = ٢

◆ مثال٢: مثل بيانيا الدالة د (س) = -٣









الدالة التربيعية

إعداد أ/ محمود عوض

- ❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية
- ❖ الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أ س^{2} + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية

مثل: د(س) = س^{2} ، د(س) = ـ س^{2} ، د(س) = س^{2} ـ ٥ ، د(س) = س^{2} ـ ٢ س +١

ملاحظات هامة

١ إذا كان معامل س^{2} موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

٢ إذا كان معامل س^{2} سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

٣ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة د(س) = أ س^{2} + ب س + جـ بالقانون:

نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

٤ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة العظمى أو الصغرى

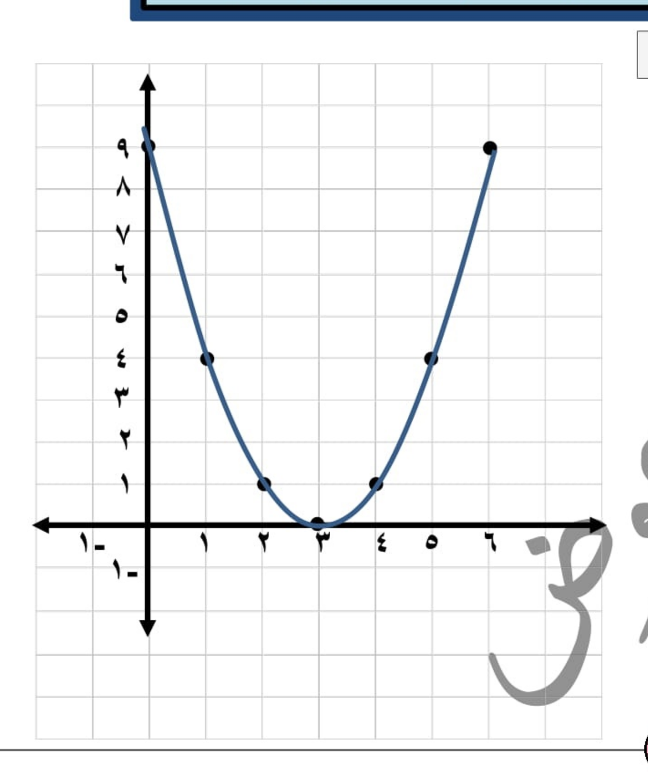
مثال ١ مثل بيانيا الدالة د(س) = (س ـ ٣)^{2} متخذاً س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	(س ـ ٣)^{2}	ص
٠	(٠ ـ ٣)^{2}	٩
١	(١ ـ ٣)^{2}	٤
٢	(٢ ـ ٣)^{2}	١
٣	(٣ ـ ٣)^{2}	٠
٤	(٤ ـ ٣)^{2}	١
٥	(٥ ـ ٣)^{2}	٤
٦	(٦ ـ ٣)^{2}	٩



رأس المنحنى = (٣ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٣

القيمة الصغرى = ٠

إعداد / محمود عوض حسن

مثال ٢

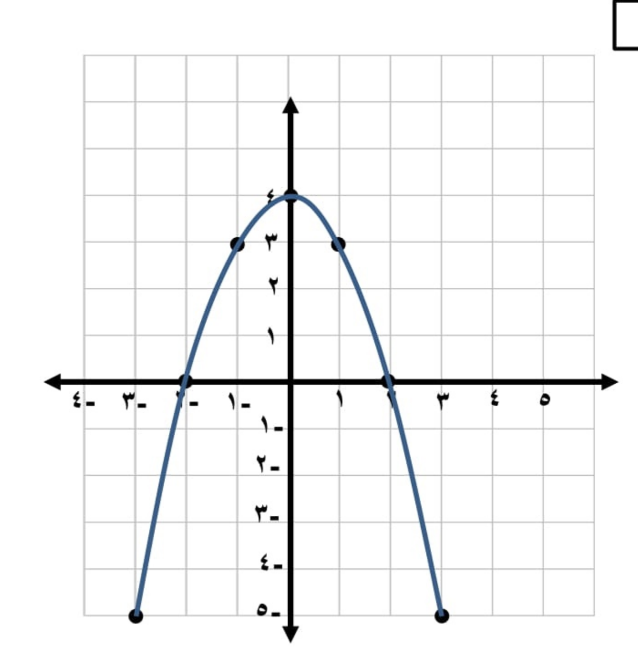
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٤ – س^{٢} متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٢) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	٤ – س^{٢}	ص
-٣	٤ – (-٣)^{٢}	-٥
-٢	٤ – (-٢)^{٢}	٠
-١	٤ – (-١)^{٢}	٣
٠	٤ – (٠)^{٢}	٤
١	٤ – (١)^{٢}	٣
٢	٤ – (٢)^{٢}	٠
٣	٤ – (٣)^{٢}	-٥



رأس المنحنى = (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى = ٤

مثال ٣

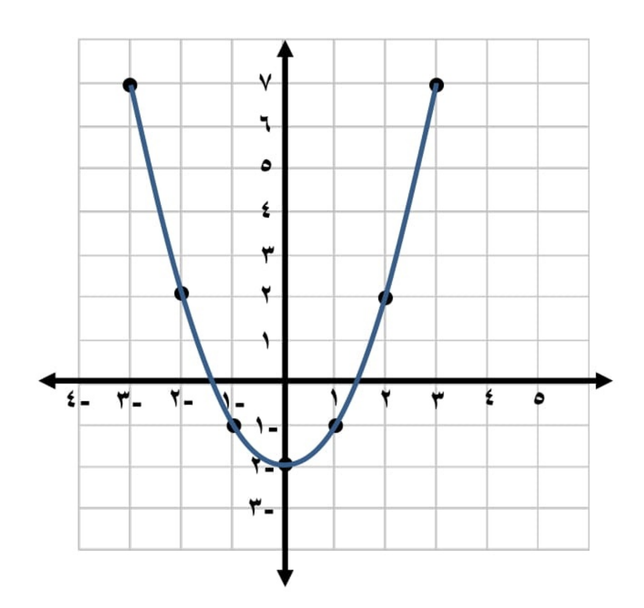
مثل بيانيا الدالة د(س) = س^{٢} – ٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٣) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	س^{٢} – ٢	ص
-٣	(-٣)^{٢} – ٢	٧
-٢	(-٢)^{٢} – ٢	٢
-١	(-١)^{٢} – ٢	-١
٠	(٠)^{٢} – ٢	-٢
١	(١)^{٢} – ٢	-١
٢	(٢)^{٢} – ٢	٢
٣	(٣)^{٢} – ٢	٧



رأس المنحنى = (٠ ، -٢)

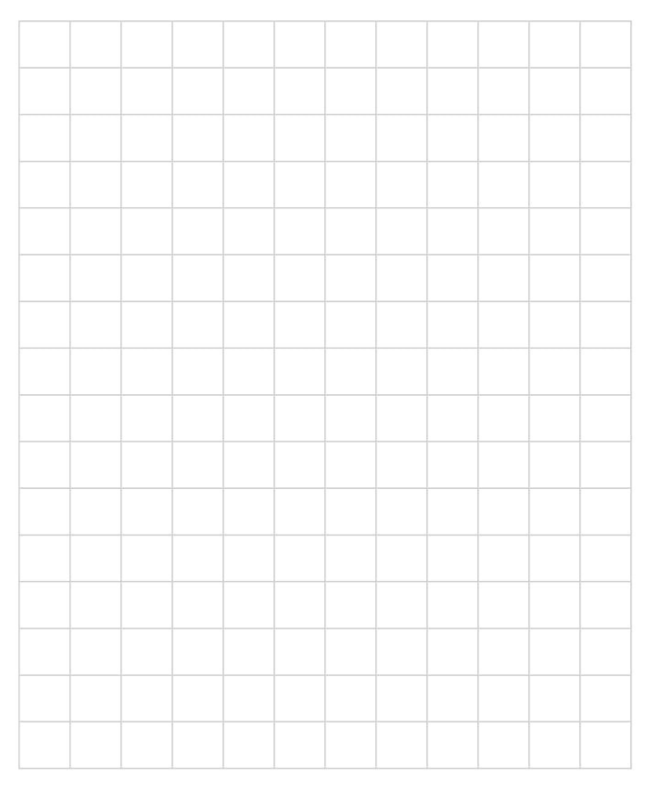
معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = -٢

تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د(س) = س^{٢} + ٢س + ١ متخذاً س ∋ [-٤ ، ٢]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

س	س^{٢} + ٢س +١	ص



رأس المنحنى =

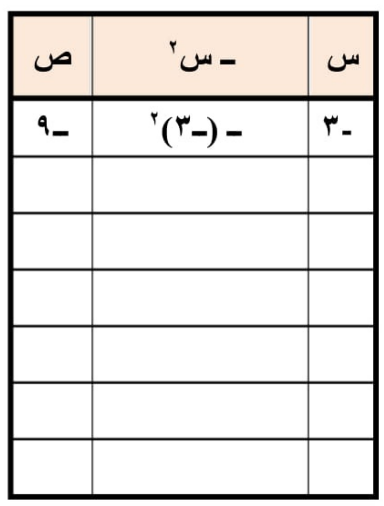
معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

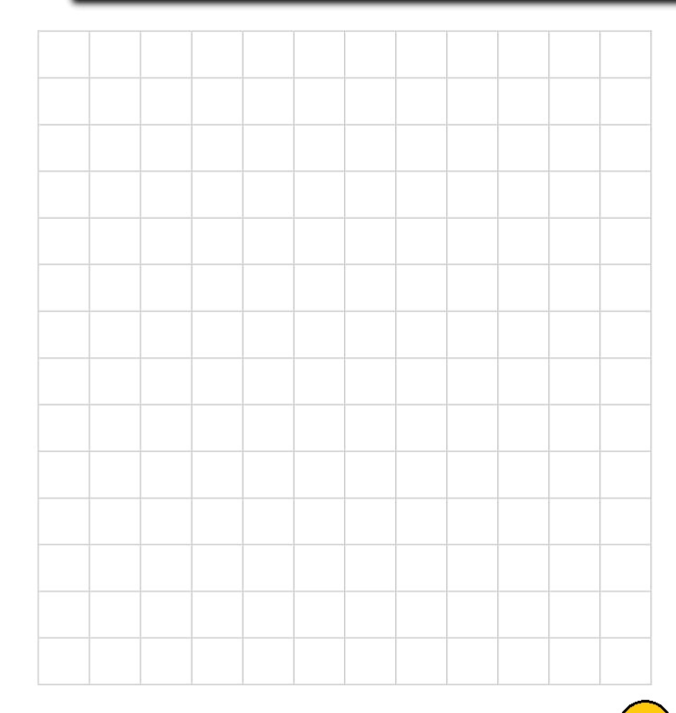
محمود عوض
معلم أول رياضيات

تدريب ٢

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ـ س^{٢} متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل ٣)القيمة الصغرى أو العظمى



س	ـ س^{٢}	ص
-٣	ـ (-٣)^{٢}	-٩



رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =



أسئلة اختر على الوحدة الأولى

١ إذا كان (٢ ، س – ١) = (ص ، ٠) فإن س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢ إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣) فإن $\sqrt{\text{س+٢ص}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٥

٣ إذا كان (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨} فإن س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٤ النقطة (-٣ ، ٤) تقع فى الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع

٥ إذا كانت س = { ٢ } ، ص = { ٣ } فإن س × ص = ...

(أ) ٦ (ب) { ٣ } (جـ) (٢ ، ٣) (د) { (٢ ، ٣) }

٦ إذا كان ن (س) = ٣ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

٧ إذا كان ن (س) = ٢ ، ن (ص × س) = ٦ فإن ن (ص^2) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ١٢

٨ إذا كانت ن (س^2) = ٩ فإن ن (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٩ إذا كانت النقطة (س -٤ ، ٢- س) تقع فى الربع الثالث فإن س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

١٠ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

١١ إذا كانت د(س) = ٧ فإن د (-٣) = ...

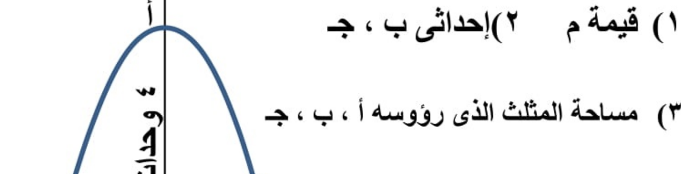
(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢١ (د) -٢١

١٢ الدالة د : د(س) = ٣ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٣)

متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:



د(س) = م – س^2 فإذا كان أ و = ٤ وحدات فأوجد:

١) قيمة م ٢) إحداثى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، جـ

الحل

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٤ = م – ٠^2 ∴ م = ٤
- إحداثى ب هو (س ، ٠) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٠ = ٤ – س^2 ∴ س^2 = ٤ ∴ س = ± ٢
  ∴ إحداثى ب (٢ ، ٠) ، إحداثى جـ (–٢ ، ٠)
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع
  = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة

واجب على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

حاصل الضرب الديكارتى

١ إذا كانت (س ـ ١ ، ٢٩) = (٤ ، ص^٣ + ١)
فأوجد قيمة س + ٢ ص

٢ إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٥ }
، ع = { ٤ ، ٥ } فأوجد:
١) (س ـ ص) × ع ٢) ن (ع^٢)

٣ إذا كانت س × ص = { (٦،٢) ، (٩،٢) ، (٦،٣)
، (٩،٣) ، (٦،٥) ، (٩،٥) } فأوجد:
١) س ، ص ٢) ص × س ٣) ن (س^٢)

العلاقة

١ إذا كانت س = {٥،٤،٢،١} ، ص = {١٦،٤،١}
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:
أ^٢ = ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى
٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟

٢ إذا كانت س = {٤،٣،٢،١}
، ص = {ص:ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:
(أ = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى
٢) بيّن أن ع دالة وأوجد مداها؟

٣ إذا كانت س = {٣،٢،١} ، ص = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$}
وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن أ ب = ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بيّن أن ع دالة واكتب مداها

الدالة

١ إذا كان بيان الدالة د = {(٣،١) ، (٥،٢) ، (٧،٣)
، (٩،٤) ، (١١،٥)}
١) اكتب مجال ومدى الدالة د ٢) اكتب قاعدة الدالة

٢ إذا كانت د (س) = س^٢ ـ ٣س ،
ر (س) = س ـ ٣
١) أوجد د(٢) + ر(٢)
٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر

٣ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥س + ٤
يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب)
فأوجد قيمة ب

٤ إذا كانت د (س) = ٣س + ب ، د (٤) = ١٣
فأوجد قيمة ب

٥ إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ← ح
حيث د (س) = ٢س + أ ، د (٣) = ٩
١) أوجد قيمة أ
٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السينى

التمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود

١ مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢س + ١ ثم أوجد نقط
تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محورى الإحداثيات

٢ ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س^٢ + ١
متخذا س ∈ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم عين:
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل
٣)القيمة الصغرى أو العظمى

٣ مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = ٣ ـ س^٢
حيث س ∈ [ـ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد:
١) معادلة محور التماثل
٢) القيمة العظمى أو الصغرى

اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب – ٥) تقع على محور السينات فإن ب = ...
(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ إذا كان { ٢ } × { أ ، ب } = { (٢،٤) ، (٢،٣) } فإن أ – ب = ...
(أ) ١ (ب) –١ (جـ) ±١ (د) صفر

٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....
(أ) (٠،٥) (ب) (٥،٥) (جـ) (٥،٠) (د) (٠،٠)

٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص^٢) = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى:

أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أ = $\frac{١}{٣}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى وبين أن ع دالة واكتب مداها.

ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٢

وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

السؤال الثالث:

أ) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

ب) إذا كان س × ص = { (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،٢) ، (٢،٣) }

فأوجد: ١) س ∪ ص ٢) ص^٢

السؤال الرابع:

أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، –٥)

فأوجد : ١) د ($\frac{٢}{٣}$) ٢) قيمة أ

ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س^٢ – ١ حيث س ∈ [–٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج:

١) معادلة محور التماثل ٢) القيمة الصغرى للدالة

النسبة

◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب: تالى النسبة ، أ ، ب معا: حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣ + ٢}{٥ + ٢} \neq \frac{٥}{٧}$ تغيرت النسبة

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددان هما ٣م ، ٤م

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

نفرض أن العددان هما ٣م ، ٧م

∴ $\frac{\text{٣م - ٥}}{\text{٧م - ٥}} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٩م – ١٥ = ٧م – ٥

٩م – ٧م = -٥ + ١٥

٢م = ١٠ م = ٥

∴ العدد الأول = ٣م = ٣×٥ = ١٥

∴ العدد الثانى = ٧م = ٧×٥ = ٣٥

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد = س

$\frac{\text{س + ٧}}{\text{س + ١١}} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣س + ٢١ = ٢س + ٢٢

٣س – ٢س = ٢٢ – ٢١

∴ س = ١ ∴ العدد هو ١

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ مربعه = $\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{س}^{٢}\text{+٥}}{\text{س}^{٢}\text{+١١}} = \frac{٣}{٥}$ (مقص)

٥$\text{س}^{٢}$ + ٢٥ = ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٣٣

٥$\text{س}^{٢}$ – ٣ $\text{س}^{٢}$ = ٣٣ – ٢٥

٢ $\text{س}^{٢}$ = ٨ $\text{س}^{٢}$ = ٤

س = ± ٢ ∴ العدد الموجب هو ٢

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ ثلاثة أمثاله = ٣س

$\frac{\text{٤٩ - ٣س}}{\text{٦٩ - ٣س}} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣(٤٩ – ٣س) = ٢ (٦٩ – ٣س)

١٤٧ – ٩س = ١٣٨ – ٦س

– ٩س + ٦س = ١٣٨ – ١٤٧

– ٣س = – ٩ ∴ س = ٣

إعداد أ/ محمود عوض



التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلا : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ يسمى تناسب والكميات أ ، ب ، جـ ، د تسمى **كميات متناسبة**

◆ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث:

أ : الأول المتناسب ، ب : الثانى المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب ، د : الرابع المتناسب

أ ، د : الطرفين ، ب ، جـ : الوسطين

خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : أ × د = ب × جـ

وغالبا ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل : $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$ أو $\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

∴ $\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤ × س = ١٢ × ١٦

س = $\frac{١٢ \times ١٦}{٤}$ = ٤٨

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

تدريب

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد
٢ ، ٤ ، ١٢ ، ١٨ فإنها تكون متناسبة

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد
٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{س + ٣}{س + ٥} = \frac{س + ٨}{س + ١٢}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$س^٢ + ٣س + ١٢س + ٣٦ = س^٢ + ٥س + ٨س + ٤٠$

١٥س + ٣٦ = ١٣س + ٤٠

١٥س – ١٣س = ٤٠ – ٣٦

٢س = ٤ ⟵ س = ٢ ∴ العدد هو ٢

خاصية ٢

إذا كان أ جـ = ب د فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{د}{جـ}$ في كل طرف ثبت حاجة وانقل التانية

- مثال ١: إذا كان ٥ أ = ٧ ب فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{ب}{أ} = \frac{٥}{٧}$
- مثال ٢: إذا كان ٢س – ٣ص = ٠ فإن ٢س = ٣ص ومنها $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٣}$

تدريب: إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

خاصية ٣

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ $\frac{مقدم}{مقدم} = \frac{تالى}{تالى}$

- مثال ١: إذا كانت أ ، ٢ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٩}$ ومنها $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٩}$
- مثال ٢: إذا كان: ٥أ ، ٢س ، ٣ب ، ٧س كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} =$ ....

الحل : $\frac{٥ أ}{٢س} = \frac{٣ب}{٧س}$ ⟵ $\frac{٥ أ}{٣ب} = \frac{٢س}{٧س}$ ∴ $\frac{٥ أ}{٣ب} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٢ \times ٣}{٧ \times ٥} = \frac{٦}{٣٥}$

تدريب: إذا كان: أ ، ٢ص ، ب ، ٣ص كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

خاصية ٤ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م

◆ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$ ومنها أ = جـ م ، ب = د م

يمكن أيضا استنتاج أن : أ = ب م ، جـ = د م ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

◆ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ = ٣ م ، ب = ٥ م ومن الخطأ أن تقول أ = ٣ ، ب = ٥ وتنسى الثابت

◆ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فإن : س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م



ملاحظات

١ للتسهيل هتلغى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود مضروبة : مثل جـ م × جـ فقط اضرب فتكون $جـ^٢م$
- إذا كانت الحدود متشابهة : مثل ١٢م + ١٠م فقط اجمع فتكون ٢٢م

٢ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $أ^٢ = ب^٢م^٢$ (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة نثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$

الحـل

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$ ، أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣جـم - ٢جـ}{٥جـم + ٣جـ}$

$= \frac{جـ(٣م - ٢)}{جـ(٥م + ٣)} = \frac{٣م - ٢}{٥م + ٣}$

الأيسر $= \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د} = \frac{٣دم - ٢د}{٥دم + ٣د}$

$= \frac{د(٣م - ٢)}{د(٥م + ٣)} = \frac{٣م - ٢}{٥م + ٣}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أجـ}{بد} = \left(\frac{أ - جـ}{ب - د}\right)^٢$

الحـل

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$

أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{أجـ}{بد} = \frac{جـم \times جـ}{دم \times د} = \frac{جـ^٢ م}{د^٢ م} = \frac{جـ^٢}{د^٢}$

الأيسر $= \left(\frac{أ - جـ}{ب - د}\right)^٢ = \left(\frac{جـم - جـ}{دم - د}\right)^٢$

$= \left(\frac{جـ(م - ١)}{د(م - ١)}\right)^٢ = \left(\frac{جـ}{د}\right)^٢ = \frac{جـ^٢}{د^٢}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣ إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$

فاثبت أن : $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$

$= \frac{٢ \times ٤م - ٥م}{٣ \times ٣م - ٢ \times ٤م + ٥م}$

$= \frac{٨م - ٥م}{٩م - ٨م + ٥م} = \frac{٣م}{٦م} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} =$ الأيسر

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فاثبت أن:

$\sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢} = ٢س + ص$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢}$

$= \sqrt{٣ \times ٩م^٢ + ٣ \times ١٦م^٢ + ٥ م^٢}$

$= \sqrt{٢٧ م^٢ + ٤٨ م^٢ + ٢٥ م^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ م^٢} = ١٠ م$

الأيسر $= ٢س + ص = ٢ \times ٣م + ٤م$

$= ٦م + ٤م = ١٠ م$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{جـ}{د - جـ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$

أ = جـ م ، ب = د م

الطرف الأيمن = $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{جـ م}{د م - جـ م}$

$= \frac{جـ م}{م (د - جـ)} = \frac{جـ}{د - جـ} =$ الأيسر

مثال ٦

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة: $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

س = ٢م ، ص = ٣م

$\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م}$

$= \frac{٦م + ٦م}{١٨م - ٢م}$

$= \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٧

إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢جـ^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

فاثبت أن: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$ب^٢ (أ^٢ - ٢جـ^٢) = أ^٢ (ب^٢ - ٢د^٢)$

$أ^٢ب^٢ - ٢ب^٢جـ^٢ = أ^٢ب^٢ - ٢أ^٢د^٢$

$- ٢ب^٢جـ^٢ = - ٢أ^٢د^٢$ (÷ -٢)

$ب^٢جـ^٢ = أ^٢د^٢$ ثبت وانقل

$\therefore \frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{جـ^٢}{د^٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة

مثال ٨

إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

بالتعويض فى أ + ب = ٢٧,٦

∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦

١٢م = ٢٧,٦

∴ م = ٢,٣

∴ أ = ٥م = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥

ب = ٧×٢,٣ = ١٦,١

جـ = ٣م = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

خاصية ٥

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب

- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلا: يمكن ضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × −١ وضرب النسبة الثالثة × ٣ ثم بالجمع

فيكون : $\frac{٢ أ - جـ + ٣ هـ}{٢ ب - د + ٣ و}$ = إحدى النسب

- عايز تعرف هتضرب ازاى وفى كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف
- ما تيجوا نشوف !

مثال ٩

إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$

فاثبت أن : $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

الحل

عايزين نوصل للبسط اللى في الاثبات:
بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ والجمع مع الثانية

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٢ب + ٢ب - جـ}$ = إحدى النسب

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ}$ = إحدى النسب ⟵ (١)

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى × ٢
والنسبة الثانية × ٢ وجمع النسب الثلاثة

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}$

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$ = إحدى النسب ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن:

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

مثال ١٠

إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$

فاثبت أن : $\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

الحل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع : النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$\frac{أ + ب + ب + جـ + جـ + أ}{٣ + ٦ + ٥} = \frac{٢أ + ٢ب + ٢جـ}{١٤}$

$= \frac{٢(أ + ب + جـ)}{١٤}$

$= \frac{أ + ب + جـ}{٧}$ = إحدى النسب ⟵ (١)

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللى فيهم أ ــ النسبة الثانية

$\frac{أ + ب + جـ + أ - ب - جـ}{٣ + ٥ - ٦}$

$= \frac{٢أ}{٢} = أ$ = إحدى النسب ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

$\frac{أ + ب + جـ}{٧} = أ \quad \therefore \quad \frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

مسألة مهمة

إذا كانت $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س






إعداد أ/ محمود عوض

◆ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن:
أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب

◆ الوسط المتناسب بين عددين = ± $\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ = ± $\sqrt{٢ \times ١٨}$ = ± $\sqrt{٣٦}$ = ±٦

❖ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$
ومنها ب = جـ م ، أ = جـ م^{٢}

❖ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$
ومنها جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادى في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالى

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن أ^{٢} = ب^{٢} م^{٢} (حط التربيع على ب ، م)
و إذا كان ب = د م^{٢} فإن ب^{٢} = د^{٢} م^{٤}
و إذا كان أ = د م^{٣} فإن أ^{٢} = د^{٢} م^{٦}

مثال ١

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ م^{٢}

الأيمن = $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{جـ^{٢} م^{٤} + جـ^{٢} م^{٢}}{جـ^{٢} م^{٢} + جـ^{٢}}$

= $\frac{جـ^{٢} م^{٢} (م^{٢} + ١)}{جـ^{٢} (م^{٢} + ١)}$ = م^{٢}

الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^{٢}}{جـ}$ = م^{٢}

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{جـ^{٢} - د^{٢}}{أ - جـ} = \frac{ب د}{أ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

∴ جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

الأيمن = $\frac{جـ^{٢} - د^{٢}}{أ - جـ} = \frac{د^{٢} م^{٢} - د^{٢}}{د م^{٣} - د م}$

= $\frac{د^{٢} (م^{٢} - ١)}{د م (م^{٢} - ١)} = \frac{د}{م}$

الأيسر = $\frac{ب د}{أ} = \frac{د م^{٢} \times د}{د م^{٣}} = \frac{د}{م}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{أ^{٢} - ٣جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$

الحـل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

الأيمن $= \frac{أ^{٢} - ٣جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{د^{٢}م^{٦} - ٣د^{٢}م^{٢}}{د^{٢}م^{٤} - ٣د^{٢}}$

$= \frac{د^{٢}م^{٢}(م^{٤} - ٣)}{د^{٢}(م^{٤} - ٣)} = م^{٢}$

الأيسر $= \frac{ب}{د} = \frac{د م^{٢}}{د} = م^{٢}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{أب - جـد}{ب^{٢} - جـ^{٢}} = \frac{أ + جـ}{ب}$

الحـل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

الأيمن $= \frac{أب - جـد}{ب^{٢} - جـ^{٢}} = \frac{د م^{٣} \times د م^{٢} - د م \times د}{د^{٢}م^{٤} - د^{٢} م^{٢}}$

$= \frac{د^{٢}م^{٥} - د^{٢} م}{د^{٢}م^{٤} - د^{٢} م^{٢}} = \frac{د^{٢}م (م^{٤} - ١)}{د^{٢} م^{٢} (م^{٢} - ١)}$

$= \frac{د^{٢}م (م^{٢} - ١)(م^{٢} + ١)}{د^{٢}م^{٢}(م^{٢} - ١)} = \frac{م^{٢} + ١}{م}$

الأيسر $= \frac{أ + جـ}{ب} = \frac{د م^{٣} + د م}{د م^{٢}} = \frac{د م (م^{٢} + ١)}{د م^{٢}}$

$= \frac{م^{٢} + ١}{م}$ ∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{ب}{ب + جـ}$

الحـل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

ب = جـ م ، أ = جـ م^{٢}

الأيمن $= \frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{جـ م^{٢} - جـ م}{جـ م^{٢} - جـ} = \frac{جـ م (م - ١)}{جـ (م^{٢} - ١)}$

$= \frac{جـ م (م - ١)}{جـ (م - ١)(م + ١)} = \frac{م}{م + ١}$

الأيسر $= \frac{ب}{ب + جـ} = \frac{جـ م}{جـ م + جـ} = \frac{جـ م}{جـ(م+١)}$

$= \frac{م}{م+١}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦

إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

فاثبت أن: $\frac{س ع}{ص^{٢} + ص ع} = \frac{س}{س + ص}$

الحـل

$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$

ص = ع م ، س = ع م^{٢}

الأيمن $= \frac{س ع}{ص^{٢} + ص ع} = \frac{ع م^{٢} \times ع}{ع^{٢} م^{٢} + ع م \times ع}$

$= \frac{ع^{٢} م^{٢}}{ع^{٢} م^{٢} + ع^{٢} م} = \frac{ع^{٢} م^{٢}}{ع^{٢} م (م + ١)} = \frac{م}{م + ١}$

الأيسر $= \frac{س}{س + ص} = \frac{ع م^{٢}}{ع م^{٢} + ع م} = \frac{ع م^{٢}}{ع م (م + ١)}$

$= \frac{م}{م+١}$ ∴ الأيمن = الأيسر

إعداد أ/ محمود عوض

٤ التغير الطردي

♣ إذا كانت ص تتغير طرديا مع س فإنها تكتب: ص $\propto$ س ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص = م س	$م = \frac{ص}{س}$	$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

◆ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص $\propto$ س^2 فإن الثابت $م = \frac{ص}{س^2}$ والعلاقة هى ص = م س^2

◆ لإثبات أن ص $\propto$ س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ١ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص= ٦ عندما س = ٣ فأوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ٥

الحل

ص $\propto$ س ∴ ص = م س

$م = \frac{ص}{س} = \frac{٦}{٣} = ٢$

العلاقة هى: ص = ٢ س

بالتعويض عن س = ٥

∴ ص = ٢ × ٥ = ١٠

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير طرديا بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

ص $\propto$ س ∴ ص = م س

$م = \frac{ص}{س} = \frac{١٤}{٤٢} = \frac{١}{٣}$

العلاقة هى: $ص = \frac{١}{٣}$ س

$٢٠ = \frac{١}{٣}$ س

∴ س = ٢٠ × ٣ = ٦٠

مثال ٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومترا في ٦ ساعات، فكم كيلومترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

الحل

نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز

$ف_1 = ١٥٠$ ، $ز_1 = ٦$

$ف_2 = ؟؟$ ، $ز_2 = ١٠$

ف $\propto$ ز ∴ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$

$\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$

∴ $ف_2 = \frac{١٥٠ \times ١٠}{٦} = ٢٥٠$ كيلومتر

مثال ٤ إذا كان: $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن: ص $\propto$ ع

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٢١س ع – ص ع = ٧س ص – ص ع

٢١ س ع = ٧ س ص

٢١ ع = ٧ ص

$ص = \frac{٢١}{٧}$ ع

∴ ص $\propto$ ع

التغير العكسى

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: ص ∝ $\frac{١}{س}$ ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص س = م	م = ص × س	$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

◆ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص س = م أو ص = $\frac{م}{س}$

◆ لإثبات أن ص ∝ $\frac{١}{س}$ نثبت أن ص س = ثابت

مثال ١

إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

الحل

ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص س = م

م = ص × س = ٣ × ٢ = ٦

العلاقة هى : ص س = ٦

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$ $\frac{٣}{ص} = \frac{١,٥}{٢}$

ص × ١,٥ = ٦ ∴ ص = ٤

مثال ٢

من بيانات الجدول التالى أجب:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

١) بين نوع التغير بين ص ، س

٢) أوجد ثابت التناسب

٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحل

١ نوع التغير عكسى (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = ص × س = ٦ × ٢ = ١٢

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص س = ١٢

ص × ٣ = ١٢ ∴ ص = ٤

مثال ٣

إذا كان : $س^{٤}ص^{٢} - ١٤س^{٢}ص + ٤٩ = ٠$

فاثبت أن: ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

الحل

بتحليل المقدار المربع الكامل

$(س^{٢}ص - ٧)^{٢} = ٠$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$س^{٢}ص - ٧ = ٠$

$س^{٢}ص = ٧$

∴ ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

مثال ٤

إذا كان: ص= أ-٩، ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ وكان أ=١٨ عندما س= $\frac{٢}{٣}$

فأوجد العلاقة بين س،ص ثم استنتج قيمة ص عندما س=١

الحل

ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ ∴ ص $س^{٢}$ = م

بالتعويض عن ص = أ-٩

(أ-٩) $س^{٢}$ = م (١٨-٩) × $(\frac{٢}{٣})^{٢}$ = م

∴ م = ٩ × $\frac{٤}{٩}$ = ٤

∴ العلاقة هى ص $س^{٢}$ = ٤

عندما س = ١ ص × $١^{٢}$ = ٤ ص = ٤

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٧ (د) ٤ : ٧

٢ إذا كان ٥ أ ـ ٢ ب = ٠ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{٥أ}{٣ب}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) ١

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{-٩}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢س ، ب ، ٣س كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

٧ إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٤} = \frac{أ + ب}{ك}$ فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى ....

(أ) ٩ (ب) -٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن ....

(أ) س $\propto$ ص (ب) ص $\propto$ س (جـ) ٣س $\propto$ ٨ص (د) س $\propto \frac{١}{ص}$

١٠ إذا كان ص $\propto$ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦

١١ العلاقة التى تمثل تغيرا طردياً بين المتغيرين س ، ص هى ....

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س +٣ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

١٢ إذا كان س ص = ٧ فإن ص $\propto$ ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س − ٧ (جـ) س (د) س + ٧

١٣ إذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل ، فإن $س^٢ص$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٩

واجب على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

النسبة والتناسب

(١) أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

(٢) عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين

(٣) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧

(٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة

(٥) إذا كانت ٣ أ = ٢ ب فأوجد قيمة $\frac{\text{٣أ} - \text{ب}}{\text{٢أ} + \text{ب}}$

(٦) إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ فأوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{٢ص} - \text{ع}}{\text{٣س} - \text{٢ص} + \text{ع}}$

(٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{٣أ} - \text{٦جـ}}{\text{ب} - \text{٢د}} = \frac{\text{٣ أ}}{\text{ب}}$

(٨) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ}^{2} - \text{جـ}^{2}}{\text{ب}^{2} - \text{د}^{2}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$

(٩) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٤س} + \text{ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{٤ص}}$

فاثبت أن: $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{٥س} - \text{٣ص}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{٣س} + \text{٥ص}}$

(١٠) إذا كان $\frac{\text{أ}^{2} - \text{٢جـ}^{2}}{\text{ب}^{2} - \text{٢د}^{2}} = \frac{\text{أ}^{2}}{\text{ب}^{2}}$

فاثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

التناسب المتسلسل

(١) إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{\text{جـ}^{2} + \text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}^{2} + \text{جـ}}{\text{د}}$

(٢) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{جـ}^{3}}{\text{جـ}^{2}\,\text{د} + \text{د}^{3}}$

(٣) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن $\frac{\text{٢ جـ}^{2} - \text{٣ ب}^{2}}{\text{٢ ب}^{2} - \text{٣ أ}^{2}} = \frac{\text{جـ}^{2}}{\text{ب}^{2}}$

(٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ١،٥،١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

التغير الطردى والعكسى

(١) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢٠ عندما س= ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

(٢) إذا كانت أ $\propto$ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥

فأوجد: ١) العلاقة بين أ ، ب

٢) قيمة ب عندما أ = ٤

(٣) إذا كانت ص $\propto \frac{\text{١}}{\text{س}}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: ١) العلاقة بين ص ، س

٢) قيمة س عندما ص = ١٦

(٤) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧

(٥) إذا كانت $\frac{\text{أ} + \text{٢ب}}{\text{٦}} = \frac{\text{ب} + \text{٣جـ}}{\text{٣}}$ فاثبت أن أ $\propto$ جـ

اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (جـ) ±٤ (د) ±٣

(٢) إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{ب - أ}{ب + أ} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٣) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٧}$ عندما ص = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ فإن ثابت التناسب = ...

(أ) ٥ (ب) ٣٥ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٤) إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{ب}{أ} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦

فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

ب) إذا كانت ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة $\frac{٧أ + ٩ب}{٤أ + ٢ب}$

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فاثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + جـ^٢}{جـ^٢}$

ب) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:

١) العلاقة بين ص ، س ٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

ب) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - ٢جـ}{ب - ٢د}$

انتهت الأسئلة

التشتت

- التشتت هو التباعد أو الاختلاف
- من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعيارى

١ المدى

- هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

- مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ، ١٧ هو ٢٣ – ١٥ = ٨

٢ الانحراف المعيارى σ

- هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى
- الانحراف المعيارى هو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها.
- اذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف σ = صفر والمدى = صفر

حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول مكون من ٣ أعمدة
- العمود الأول س : نكتب فيه القيم التى في المسألة
- نحسب الوسط $\overline{س}$ قبل أن نملأ الجدول

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 ك}{\text{مجـ ك}}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ ك}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول من ٦ أعمدة
- العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة
- العمود الثانى ك نكتب فيه أرقام الصف الثانى من المسألة
- نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط $\overline{س}$ ثم نكمل الجدول

مثال ١ احسب الانحراف المعيارى للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

الوسط $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

= $\frac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥}$ = $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠

س	س - $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
١٦	١٦-٢٠ = -٤	١٦
٣٢	٣٢-٢٠ = ١٢	١٤٤
٥	٥-٢٠ = -١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠-٢٠ = ٠	٠
٢٧	٢٧-٢٠ = ٧	٤٩
مجـ	xxx	٤٣٤

σ = $\sqrt{\frac{\text{مجـ}(س-\bar{س})^{٢}}{ن}}$ = $\sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}}$ = ٩,٣

مثال ٢ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س×ك	س − $\bar{س}$	(س−$\bar{س}$)^{٢}	(س−$\bar{س}$)^{٢}ك
٠	٨	صفر	٠-٢ =-٢	٤	٤×٨ =٣٢
١	١٦	١٦	١-٢ =-١	١	١×١٦=١٦
٢	٥٠	١٠٠	٢-٢ =٠	٠	٠×٥٠=٠
٣	٢٠	٦٠	٣-٢ =١	١	١×٢٠=٢٠
٤	٦	٢٤	٤-٢ =٢	٤	٤×٦=٢٤
مجـ	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

الوسط $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجـ}(س\times ك)}{\text{مجـ ك}}$ = $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ = ٢

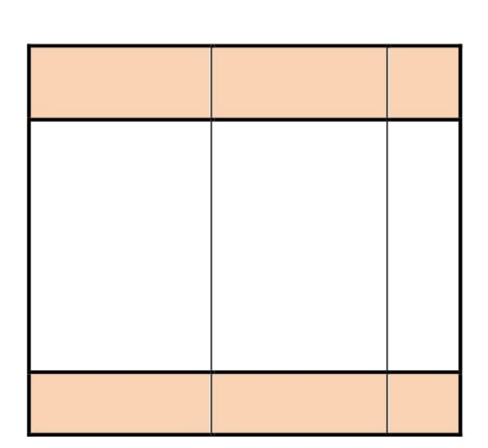
الانحراف σ = $\sqrt{\frac{\text{مجـ}(س-\bar{س})^{٢}ك}{\text{مجـ ك}}}$

= $\sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}}$ = ١ طفل

تدريب احسب الانحراف المعيارى للقيم:

٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل



تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س×ك	س − $\bar{س}$	(س−$\bar{س}$)^{٢}	(س−$\bar{س}$)^{٢}ك
مجـ			xx	xx	



حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى ذي المجموعات

يحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعيارى للجدول التكرارى البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو :

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالى :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$$

مثال ٣ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعة	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$$م_1 = \frac{٠ + ٤}{٢} = ٢ \quad ، \quad م_2 = \frac{٤ + ٨}{٢} = ٦ \quad ، \quad م_3 = \frac{٨ + ١٢}{٢} = ١٠$$

$$م_4 = \frac{١٢ + ١٦}{٢} = ١٤ \quad ، \quad م_5 = \frac{١٦ + ٢٠}{٢} = ١٨$$

س	ك	س × ك	س − س̄	(س − س̄)^2	(س − س̄)^2 ك
٢	٣	٦	٩,٦-	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	٥,٦-	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	١,٦-	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2 ك}{\text{مجـ } ك}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} = ٥,٧$$

تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الكيلومترات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل



أسئلة اختر على الإحصاء

١ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(أ) المدى (ب) الوسط الحسابى (جـ) الإنحراف المعيارى (د) المنوال

٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المنوال (ب) الوسيط (جـ) الوسط (د) المدى

٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو ....

(أ) المنوال (ب) الوسيط (جـ) المدى (د) الانحراف المعيارى

٥ إذا كانت ١٨ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

واجب على الإحصاء

١ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢، ١٤ ، ١٦

٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفةالتى وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة

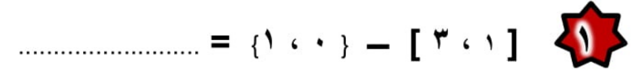
٣ التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع



تراكمى



١) [١ ، ٣] – { ٠ ، ١ } = ...

أ)] ١ ، ٣] ب)] ١ ، ٣] جـ) [١ ، ٣] د) { ٣ }

٢) مجموعة حل المعادلة (س – ١)^{٢} = ٩ في ح هى ....

أ) { ٤ } ب) { -٢ } جـ) { ٤ ، -٢ } د) { ٣ }

٣) إذا كانت ٢^{س} = ٤^{٣} فإن س = ...

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٦٤

٤) إذا كانت $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{س} = \frac{٣}{٢}$ فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٣ د) $\frac{٣}{٢}$

٥) ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ... جنيه

أ) ٢ ب) ٢,٥ جـ) ٥ د) ٢٠

٦) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .... = ...

أ) ٣ + س ب) ٣ س جـ) ٣ – س د) $\frac{٣}{س}$

٧) ($\sqrt{٥}$ + ٢) ($\sqrt{٥}$ - ٢) = ...

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٨) إذا كان أ^{٢} ـ ب^{٢} = ١٢ ، أ + ب = ٣ فإن أ ـ ب = ...

أ) ٨ ب) ٤ جـ) ١٥ د) ٣٦

٩)] ١ ، ٥ [U { ١ ، ٥ } = ...

أ) [١ ، ٥ [ب)] ١ ، ٥] جـ)] ١ ، ٥ [د) [١ ، ٥]

١٠) ح = ...

أ) ح$_{+}$ ∩ ح$_{-}$ ب) ن ∩ ن جـ) ح$_{+}$ U ح$_{-}$ د) ن U ن

١١) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ب) ٦ $\sqrt{٣}$ جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ د) - ٢ $\sqrt{٣}$

محمود عوض
معلم أول رياضيات

الأخيرة